

# Angoli razionali tra punti in un reticolo piano

Francesco Veneziano

Una collaborazione con Roberto Dvornicich, Davide Lombardo e Umberto Zannier

Università degli studi di Genova

XXII Congresso dell'Unione Matematica Italiana

4 settembre 2023

# Poligoni regolari con vertici su un reticolo piano

Édouard Lucas, 1878

Non è possibile disporre tre o sei pezzi su una scacchiera infinita a formare un triangolo equilatero o un esagono regolare.

# Poligoni regolari con vertici su un reticolo piano

Édouard Lucas, 1878

Non è possibile disporre tre o sei pezzi su una scacchiera infinita a formare un triangolo equilatero o un esagono regolare.

(Quali radici dell'unità appartengono a  $\mathbb{Q}(i)$ ?)

# Poligoni regolari con vertici su un reticolo piano

Édouard Lucas, 1878

Non è possibile disporre tre o sei pezzi su una scacchiera infinita a formare un triangolo equilatero o un esagono regolare.

(Quali radici dell'unità appartengono a  $\mathbb{Q}(i)$ ?)

Willy Scherrer, 1946

Dato un reticolo piano, se esiste un  $n$ -agono regolare con i vertici appartenenti al reticolo, allora  $n \in \{3, 4, 6\}$ .

# Poligoni regolari con vertici su un reticolo piano

Édouard Lucas, 1878

Non è possibile disporre tre o sei pezzi su una scacchiera infinita a formare un triangolo equilatero o un esagono regolare.

(Quali radici dell'unità appartengono a  $\mathbb{Q}(i)$ ?)

Willy Scherrer, 1946

Dato un reticolo piano, se esiste un  $n$ -agono regolare con i vertici appartenenti al reticolo, allora  $n \in \{3, 4, 6\}$ .

(Discesa infinita sostituendo ai vertici del poligono le differenze tra vertici consecutivi)

# Ampiezze razionali in un reticolo piano

Variante più generale:

Dato un reticolo, invece di cercare  $n$ -agoni regolari cerchiamo angoli con ampiezza pari ad un multiplo razionale di  $\pi$ .

## Ampiezze razionali in un reticolo piano

Variante più generale:

Dato un reticolo, invece di cercare  $n$ -agoni regolari cerchiamo angoli con ampiezza pari ad un multiplo razionale di  $\pi$ .

Negli interi di Gauß, se  $P\hat{O}Q$  è un multiplo razionale di  $\pi$ , allora

$$P/Q = \zeta r, \quad \zeta \in U, r \in \mathbb{R}$$

$$\overline{P}/\overline{Q} = \zeta^{-1}r$$

$$\zeta^2 = P\overline{Q}/\overline{P}Q \in \mathbb{Q}(i),$$

## Ampiezze razionali in un reticolo piano

Variante più generale:

Dato un reticolo, invece di cercare  $n$ -agoni regolari cerchiamo angoli con ampiezza pari ad un multiplo razionale di  $\pi$ .

Negli interi di Gauß, se  $P\hat{O}Q$  è un multiplo razionale di  $\pi$ , allora

$$P/Q = \zeta r, \quad \zeta \in U, r \in \mathbb{R}$$

$$\overline{P}/\overline{Q} = \zeta^{-1}r$$

$$\zeta^2 = P\overline{Q}/\overline{P}Q \in \mathbb{Q}(i),$$

quindi il risultato di Lucas può essere generalizzato dicendo che se tre punti in  $\mathbb{Z}[i]$  individuano un angolo con ampiezza in  $\pi\mathbb{Q}$ , questa ampiezza è in  $\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ .

## Il nostro problema

- Quali e quanti angoli razionali possono essere ottenuti tra i punti di un qualunque reticolo piano?
- Classificare i reticoli in base alle configurazioni di tali angoli.

## Il nostro problema

- Quali e quanti angoli razionali possono essere ottenuti tra i punti di un qualunque reticolo piano?
- Classificare i reticoli in base alle configurazioni di tali angoli.

Ai fini di questa classificazione, è indifferente studiare un reticolo  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  o il prodotto tensore  $V = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ .

## Il nostro problema

- Quali e quanti angoli razionali possono essere ottenuti tra i punti di un qualunque reticolo piano?
- Classificare i reticoli in base alle configurazioni di tali angoli.

Ai fini di questa classificazione, è indifferente studiare un reticolo  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  o il prodotto tensore  $V = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ .  
Studiamo questi spazi a meno di omotetie e coniugio complesso.

## L'equazione di due angoli non adiacenti

Un solo angolo non permette di concludere nulla

## L'equazione di due angoli non adiacenti

Un solo angolo non permette di concludere nulla

Due angoli  $\rightsquigarrow$  un'equazione

Se  $\theta, \mu \in U$ ,  $\tau = \theta r$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $ab(a - b) \neq 0$  e

$$\mu \frac{\tau + a}{\tau + b} \in \mathbb{R},$$

otteniamo

$$r^2 + r \frac{a(y - x) + b(xy - 1)}{\theta(y - 1)} + ab = 0,$$

$$\theta^2 = x, \mu^2 = y.$$

## $n$ -uple razionali

Serve distinguere angoli adiacenti da angoli non adiacenti, perché danno luogo ad equazioni di forma diversa.

## $n$ -uple razionali

Serve distinguere angoli adiacenti da angoli non adiacenti, perché danno luogo ad equazioni di forma diversa.

Chiamiamo una  $n$ -upla razionale un insieme di  $n$  vettori tali che ogni coppia di essi formi un angolo razionale.

## $n$ -uple razionali

Serve distinguere angoli adiacenti da angoli non adiacenti, perché danno luogo ad equazioni di forma diversa.

Chiamiamo una  $n$ -upla razionale un insieme di  $n$  vettori tali che ogni coppia di essi formi un angolo razionale.

Diciamo che uno spazio è di tipo  $(n)$  se contiene una  $n$ -upla razionale; estendiamo la notazione additivamente dicendo che è di tipo  $(n)+(m)$  se contiene una  $n$ -upla razionale ed una  $m$ -upla razionale disgiunta dalla prima, e così via.

## L'equazione di tre angoli

Da due equazioni indipendenti possiamo eliminare  $r$

## L'equazione di tre angoli

Da due equazioni indipendenti possiamo eliminare  $r$

$$P_{\textcircled{4}}(a, b, x, y, z) = (a - b)x + by - az - axy + bxz + (a - b)yz = 0.$$

## L'equazione di tre angoli

Da due equazioni indipendenti possiamo eliminare  $r$

$$P_{\textcircled{4}}(a, b, x, y, z) = (a - b)x + by - az - axy + bxz + (a - b)yz = 0.$$

$$\begin{aligned} P_{\textcircled{3}+\textcircled{2}}(a, b, c, x, y, z) &= (2a^2 - a(b + c) + 2bc)xy - abx^2y - acy - a(a - b)xy^2 \\ &\quad - a(a - c)x + b(a - c)x^2 + c(a - b)y^2 \\ &\quad - (2a^2 - a(b + c) + 2bc)xyz + acx^2yz \\ &\quad + abyz + a(a - c)xy^2z + a(a - b)xz \\ &\quad - c(a - b)x^2z - b(a - c)y^2z = 0. \end{aligned}$$

## L'equazione di tre angoli non adiacenti

Da due equazioni indipendenti possiamo eliminare  $r$

# L'equazione di tre angoli non adiacenti

Da due equazioni indipendenti possiamo eliminare  $r$

$$\begin{aligned} P_{3\odot}(a, b, c, d, x, y, z) = & -b(b-c)c(a-d)y^2x^2 - b(a-c)(b-d)dy^2z^2x^2 - a(b-c)(a-d)dz^2x^2 + d(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)yz^2x^2 \\ & - a(a-c)c(b-d)x^2 + c(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)yx^2 + b(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)y^2zx^2 \\ & + a(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)zx^2 + (-bca^2 - bda^2 - cd^2a - b^2ca - b^2da - c^2da + 8bcda - bcd^2 - bc^2d)yzx^2 \\ & + (b-c)(a-d)(ab+cd)y^2x + (a-c)(b-d)(ab+cd)y^2z^2x + (b-c)(a-d)(ab+cd)z^2x \\ & + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2cda^2 + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d - 2b^2cd)yz^2x \\ & + (a-c)(b-d)(ab+cd)x + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2cda^2 + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d - 2b^2cd)yx \\ & + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2bc^2a - 2bd^2a + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d)y^2zx \\ & + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2bc^2a - 2bd^2a + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d)zx \\ & + 2(2b^2a^2 - bca^2 - bda^2 + 2cda^2 + 2bc^2a + 2bd^2a - cd^2a - b^2ca - b^2da - c^2da - 4bcda + 2c^2d^2 - bcd^2 - bc^2d + 2b^2cd)yzx \\ & - a(b-c)(a-d)dy^2 - a(a-c)c(b-d)y^2z^2 - b(b-c)c(a-d)z^2 + c(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)yz^2 \\ & - b(a-c)(b-d)d + d(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)y + a(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)y^2z \\ & + b(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)z + (-bca^2 - bda^2 - cd^2a - b^2ca - b^2da - c^2da + 8bcda - bcd^2 - bc^2d)yz = 0 \end{aligned}$$

cerchiamo le soluzioni con  $x, y, z \in U, a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

# L'equazione di tre angoli non adiacenti

Da due equazioni indipendenti possiamo eliminare  $r$

$$\begin{aligned} P_{3\textcircled{2}}(a, b, c, d, x, y, z) = & -b(b-c)c(a-d)y^2x^2 - b(a-c)(b-d)dy^2z^2x^2 - a(b-c)(a-d)dz^2x^2 + d(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)yz^2x^2 \\ & - a(a-c)c(b-d)x^2 + c(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)yx^2 + b(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)y^2zx^2 \\ & + a(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)zx^2 + (-bca^2 - bda^2 - cd^2a - b^2ca - b^2da - c^2da + 8bcda - bcd^2 - bc^2d)yzx^2 \\ & + (b-c)(a-d)(ab+cd)y^2x + (a-c)(b-d)(ab+cd)y^2z^2x + (b-c)(a-d)(ab+cd)z^2x \\ & + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2cda^2 + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d - 2b^2cd)yz^2x \\ & + (a-c)(b-d)(ab+cd)x + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2cda^2 + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d - 2b^2cd)yx \\ & + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2bc^2a - 2bd^2a + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d)yzx \\ & + (-2b^2a^2 + bca^2 + bda^2 - 2bc^2a - 2bd^2a + cd^2a + b^2ca + b^2da + c^2da - 2c^2d^2 + bcd^2 + bc^2d)zx \\ & + 2(2b^2a^2 - bca^2 - bda^2 + 2cda^2 + 2bc^2a + 2bd^2a - cd^2a - b^2ca - b^2da - c^2da - 4bcda + 2c^2d^2 - bcd^2 - bc^2d + 2b^2cd)yzx \\ & - a(b-c)(a-d)dy^2 - a(a-c)c(b-d)y^2z^2 - b(b-c)c(a-d)z^2 + c(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)yz^2 \\ & - b(a-c)(b-d)d + d(ba^2 + b^2a - 2bca - 2bda + cda + bcd)y + a(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)y^2z \\ & + b(dc^2 + d^2c + abc - 2adc - 2bdc + abd)z + (-bca^2 - bda^2 - cd^2a - b^2ca - b^2da - c^2da + 8bcda - bcd^2 - bc^2d)yz = 0 \end{aligned}$$

cerchiamo le soluzioni con  $x, y, z \in U, a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

Tre angoli “in posizione generale”  $\rightsquigarrow$  finitezza delle ampiezze coinvolte, a meno di famiglie esplicite  $\rightsquigarrow$  classificazione completa dei reticoli coinvolti

# Equazioni diofanteo-trigonometriche di Conway-Jones

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = -1$$

in angoli razionali, studiata da Gordan nel 1877 per classificare i sottogruppi finiti di  $PGL_2$ .

# Equazioni diofanteo-trigonometriche di Conway-Jones

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = -1$$

in angoli razionali, studiata da Gordan nel 1877 per classificare i sottogruppi finiti di  $PGL_2$ .

Theorem (Conway-Jones, 1976)

*Sia*

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j \xi_j = 0$$

*una relazione lineare con coefficienti razionali  $a_j$  tra radici dell'unità  $\xi_j$ , normalizzata con  $\xi_0 = 1$ .*

*Allora, o esiste un sottoinsieme proprio degli addendi che abbia somma nulla, o l'ordine comune  $Q$  degli  $\xi_j$  è un numero libero da quadrati e tale che*

$$\sum_{p|Q} (p-2) \leq k-2.$$

## Difficoltà computazionali

Possibile approccio: Usare Conway-Jones ripetutamente sulle sottosomme fino a limitare l'ordine delle radici coinvolte, e poi per ogni scelta di  $x, y, z$  cercare i punti razionali in  $a, b, c, d$ .

# Difficoltà computazionali

Possibile approccio: Usare Conway-Jones ripetutamente sulle sottosomme fino a limitare l'ordine delle radici coinvolte, e poi per ogni scelta di  $x, y, z$  cercare i punti razionali in  $a, b, c, d$ .

- $2^{27}$  possibili sotto-somme da considerare
- ci si ritrova a cercare punti razionali su curve di genere maggiore di 1

# Difficoltà computazionali

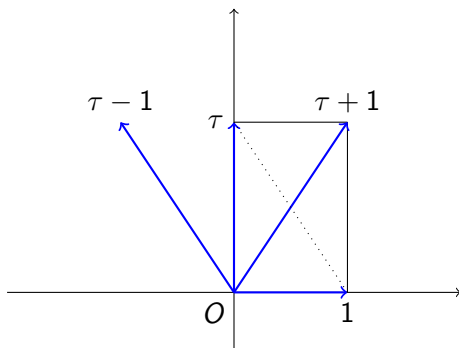
Possibile approccio: Usare Conway-Jones ripetutamente sulle sottosomme fino a limitare l'ordine delle radici coinvolte, e poi per ogni scelta di  $x, y, z$  cercare i punti razionali in  $a, b, c, d$ .

- $2^{27}$  possibili sotto-somme da considerare
- ci si ritrova a cercare punti razionali su curve di genere maggiore di 1

Idea per riuscire ad effettuare il calcolo al computer:

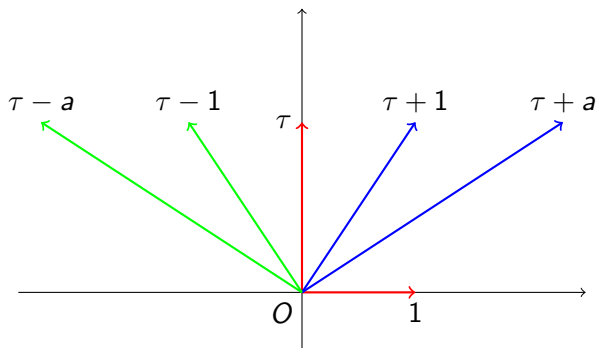
considerare l'azione di parte del gruppo di Galois dell'estensione ciclotomica  $\mathbb{Q}(x, y, z)/\mathbb{Q}$  per escludere la presenza di certi primi nell'ordine comune di  $x, y, z$ .

## Famiglie con ordini illimitati (1)



Una famiglia di tipo (4)

## Famiglie con ordini illimitati (2)



Per ogni  $a > 0$  in  $\mathbb{Q}$ , una famiglia di tipo 3 (2)

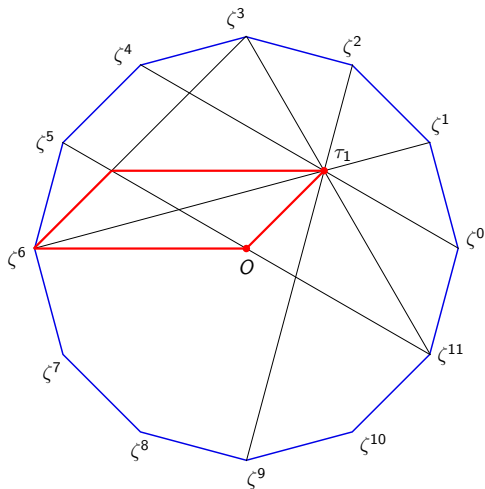
# Spazi con infiniti angoli razionali

Gli spazi  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  con  $d > 0$  intero libero da quadrati sono esempi, tutti non omotetici tra loro, di spazi che contengono infiniti angoli razionali.

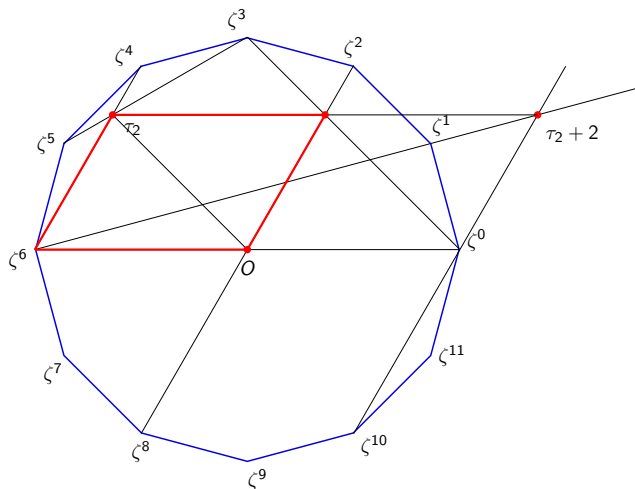
- per  $d = 1$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  ha tipo  $\infty$ (4)
- per  $d = 3$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  ha tipo  $\infty$ (6)
- per  $d \neq 1, 3$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  ha tipo  $\infty$ (2)

# Spazi dodecagonali

Ci sono esattamente altri due spazi di tipo (4)



# Spazi dodecagonali



## Tipo $\textcircled{3} + \textcircled{2}$

Ci sono esattamente 4 spazi di tipo  $2\textcircled{3}$ :

- $\langle \zeta_8^2 + \zeta_8 + 1, 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$
- $\langle \zeta_5^2 + 2\zeta_5 + 2, 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$
- $\langle 2\zeta_5^3 + \zeta_5 + 2, 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$
- $\langle 2\zeta_{12}^3 + 2\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} - 1, 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$

analogamente individuati da intersezioni di diagonali in poligoni regolari.

## Caso $ab = cd$

Due spazi di tipo esatto  $3\textcircled{2}$  dati  
da  $(a, b, c, d) = (3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$

$$\tau_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 2\sqrt{5} + \sqrt{52\sqrt{5} + 45 + 13} \right)} \cdot e^{\frac{3\pi i}{10}}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 2\sqrt{5} + \sqrt{52\sqrt{5} + 45 + 13} \right)} \cdot e^{\frac{3\pi i}{10}}$$

$$\arg(\tau/\bar{\tau}) = \frac{3}{10} \cdot 2\pi, \quad \arg\left(\frac{\tau+a}{\tau+b} / \frac{\bar{\tau}+a}{\bar{\tau}+b}\right) = \frac{2}{5} \cdot 2\pi, \quad \arg\left(\frac{\tau+c}{\tau+d} / \frac{\bar{\tau}+c}{\bar{\tau}+d}\right) = \frac{1}{10} \cdot 2\pi,$$

più altre tre famiglie razionali di tipo esatto  $3\textcircled{2}$  con radici seste dell'unità.

- Una famiglia razionale di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_8, \zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^3$
- Una famiglia ellittica di tipo  $6(2)$  e angoli  $\zeta_8, \zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^3, \zeta_8^2, \zeta_8^2$
- Una famiglia ellittica di tipo  $6(2)$  e angoli  $\zeta_8, \zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^3, \zeta_8^4, \zeta_8^4$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{10}, \zeta_{10}, \zeta_{10}^2, \zeta_{10}^2$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{10}, \zeta_{10}, \zeta_{10}^3, \zeta_{10}^3$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{10}, \zeta_{10}, \zeta_{10}^4, \zeta_{10}^4$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{10}, \zeta_{10}, \zeta_{10}^5, \zeta_{10}^5$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{10}^2, \zeta_{10}^2, \zeta_{10}^5, \zeta_{10}^5$
- Una famiglia razionale di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{12}, \zeta_{12}, \zeta_{12}^5, \zeta_{12}^5$
- Una famiglia ellittica di tipo  $6(2)$  e angoli  $\zeta_{12}, \zeta_{12}, \zeta_{12}^5, \zeta_{12}^5, \zeta_{12}^4, \zeta_{12}^4$
- Una famiglia ellittica di tipo  $6(2)$  e angoli  $\zeta_{12}, \zeta_{12}, \zeta_{12}^5, \zeta_{12}^5, \zeta_{12}^6, \zeta_{12}^6$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{12}^3, \zeta_{12}^3, \zeta_{12}^2, \zeta_{12}^2$
- Una famiglia ellittica di tipo  $4(2)$  e angoli  $\zeta_{12}^3, \zeta_{12}^3, \zeta_{12}^4, \zeta_{12}^4$